Kombinatorische Gruppentheorie

Aufgabenblatt 3

Besprechung: am 04.06.2019

1. *Spannbäume*

Zeigen Sie: jeder Graph besitzt einen Spannbaum (ein Spannbaum ist ein Teilgraph, der ein Baum ist und *alle* Knoten des ursprünglichen Graphen verbindet).

Zeigen Sie ferner: aus der Existenz eines Spannbaums für jeden Graphen folgt das Auswahlaxiom.

2. *Lokal injektive Graph-Morphismen*

Sei T ein Baum, Γ ein zusammenhängender Graph und sei $\psi : \Gamma \to T$ ein surjektiver, lokal injektiver Morphismus von Graphen. Zeigen Sie: ψ ist ein Isomorphismus.

Ein Morphismus $\phi : \Gamma \to T$ von Graphen heißt *lokal injektiv*, falls für jeden Knoten $v \in V(\Gamma)$ die Einschränkung von ψ auf $\{e \in E(\Gamma) \mid s(e) = v\}$ (die zu v inzidenten Kanten) injektiv ist.

3. *Konstruktion von Graph of Groups*

a) Sei $F(\Sigma)$ die freie Gruppe. Dann operiert $F(\Sigma)$ auf dem Cayley-Graphen $\mathcal{C}(F(\Sigma), \Sigma)$ durch Linksmultiplikation.

   Berechnen Sie den zugehörigen Graph of Groups.

b) Sei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und sei T der Baum mit Knotenmenge $\mathbb{Z}$ und Kanten von i nach $i \pm 1$. G operiere auf T durch $(a, b) \odot x = a + x$ (d.h. die erste Komponente von G operiert durch Translation, die zweite als Identität).

   Berechnen Sie den zugehörigen Graph of Groups.

c) Sei $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $(s, a)(t, b) = (s + (-1)^a t, a + b)$ und sei T der Baum mit Knotenmenge $\mathbb{Z}$ und Kanten von i nach $i \pm 1$. Wir definieren eine Operation von G auf T durch $(s, a) \odot x = 2s + (-1)^a x$.

   (i) Zeigen Sie: dies ist tatsächlich eine Operation.

   (ii) Berechnen Sie den zugehörigen Graph of Groups.

d) Sei $G = \mathbf{BS}_{1,2} = \langle\, a, t \mid tat^{-1} = a^2 \,\rangle$. Definiere einen Graphen X wie folgt: $V(X) = G/\langle a \rangle$ die Menge der Nebenklassen. Von einem Knoten $g \cdot \langle a \rangle$, gibt es Kanten zu $gt \cdot \langle a \rangle$, $gat \cdot \langle a \rangle$ und $gt^{-1} \cdot \langle a \rangle$.

   (i) Zeigen Sie: die Kanten von X sind wohldefiniert und X ist ein 3-regulärer Baum.

   (ii) G operiert auf X durch Linksmultiplikation. Berechnen Sie den zugehörigen Graph of Groups.