Diekert/Weiß Sommersemester 2019

Algorithmische Gruppentheorie

Aufgabenblatt 1

Besprechung: am Mo. 15.04.2019

Definition 1 *Eine Relation* $\Longrightarrow \subseteq X \times X$ *heißt*

i.) stark konfluent, *falls* $y \Longleftarrow x \Longrightarrow z$ *impliziert* $\exists w : y \overset{\leq 1}{\Longrightarrow} w \overset{\leq 1}{\Longleftarrow} z$

ii.) konfluent, *falls* $y \overset{*}{\Longleftarrow} x \overset{*}{\Longrightarrow} z$ *impliziert* $\exists w : y \overset{*}{\Longrightarrow} w \overset{*}{\Longleftarrow} z$

iii.) Church-Rosser, *falls* $y \overset{*}{\Longleftrightarrow} z$ *impliziert* $\exists w : y \overset{*}{\Longrightarrow} w \overset{*}{\Longleftarrow} z$

iv.) lokal konfluent, *falls* $y \Longleftarrow x \Longrightarrow z$ *impliziert* $\exists w : y \overset{*}{\Longrightarrow} w \overset{*}{\Longleftarrow} z$

v.) terminierend, *falls jede unendliche Kette*

$$x_0 \overset{*}{\Longrightarrow} x_1 \overset{*}{\Longrightarrow} \cdots x_{i-1} \overset{*}{\Longrightarrow} x_i \overset{*}{\Longrightarrow} \cdots$$

stationär wird,

vi.) konvergent *oder auch* vollständig, *falls sie lokal konfluent und terminierend ist.*

1. *Wiederholung: Ersetzungssysteme*

Sei $\Longrightarrow \subseteq X \times X$ ein Ersetzungssystem. Zeigen Sie:

i.) Starke Konfluenz impliziert Konfluenz.

ii.) Konfluenz ist äquivalent zur Church-Rosser-Eigenschaft.

iii.) Konfluenz impliziert lokale Konfluenz, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

iv.) Konvergenz impliziert Konfluenz (d.h. ein lokal konfluentes System, welches terminierend ist, ist konfluent).

2. *Ersetzungssysteme für Diedergruppen*

In der Vorlesung wurden zwei Darstellungen der Diedergruppe mit Erzeugenden und Relationen behandelt:

$$D_n = \left\langle\, \sigma, \delta \;\middle|\; \sigma^2 = \delta^n = 1, \sigma\delta\sigma = \delta^{n-1} \,\right\rangle,$$
$$D_n = \left\langle\, \sigma, \rho \;\middle|\; \sigma^2 = \rho^2 = (\sigma\rho)^n = 1 \,\right\rangle.$$

a) Die erste Darstellung führt zu dem Ersetzungssystem

$$S = \left\{\sigma^2 \to 1, \delta^n \to 1, \delta\sigma \to \sigma\delta^{n-1}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass S terminierend und lokal konfluent ist.

b) Benutzen Sie die zweite Darstellung, um ein längenlexikographisch reduzierendes konfluentes Ersetzungsystem für D_n zu finden.

c) Zeigen Sie, dass es mit den Erzeugern σ und ρ kein längenverkürzendes konfluentes Ersetzungsystem geben kann.

3. *Van-Kampen-Diagramme*

Sei $G = \langle \Sigma \mid R \rangle$ eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden Σ und Relationen R. Wir setzen $\Gamma = \Sigma \cup \Sigma^{-1}$, sodass $R \subseteq \Gamma^*$. Ohne Einschränkung seien die Relationen in R frei reduziert (d.h. kein Zeichen steht direkt neben seinem Inversen) und zyklisch reduziert (d.h. kein Wort der Länge ≥ 2 endet mit dem Inversen seines Anfangsbuchstabens). Ein planarer, gerichteter, zusammenhängender Graph, dessen Kanten mit Elementen aus Σ beschriftet sind, heißt van-Kampen-Diagramm. Als Ränder eines solchen Diagramms bezeichnen wir die Randpfade um diejenigen Facetten, deren Randbeschriftung nicht mit einem Wort aus R beschriftet sind. Hierbei soll eine rückwärts durchlaufene Kante als Inverses ihrer Beschriftung gelesen werden. Ein van-Kampen-Diagramm mit nur einem Rand, welcher mit dem Wort w beschriftet ist, nennen wir auch kurz ,,ein van-Kampen-Diagramm für w".

a) Zeigen Sie, dass ein Wort $w \in \Gamma^*$ genau dann gleich 1 in G ist, wenn es ein van-Kampen-Diagramm für w gibt.

b) Zeigen Sie, dass zwei Wörter $v, w \in \Gamma^*$ genau dann konjugiert sind, wenn es ein ringförmiges van-Kampen-Diagramm gibt, dessen zwei Ränder mit v bzw. w beschriftet sind.

c) Die zu $G = \langle \Sigma \mid R \rangle$ gehörende Dehnfunktion ist definiert als

$$\mathrm{Dehn}(n) = \max \{\mathrm{Area}(w) \mid w \in \Gamma^*, |w| \leq n, w \text{ frei reduziert}, w = 1 \text{ in } G\};$$

dabei ist Area(w) die minimale Anzahl an Flächen (d.h. mit Relationen beschrifteter Facetten) in einem van-Kampen-Diagramm für w. Zeigen Sie, dass das Wortproblem in G genau dann lösbar ist, wenn die Dehn-Funktion berechenbar ist.